10

भिन्न संख्याओं की गुणा

सत्यवीर सिंह*
अनिल तेवतिया **

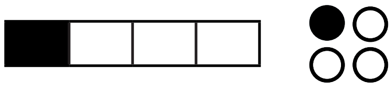
बच्चों में भिन्न संख्याओं के प्रति जो अस्पष्ट समझ या भ्रम एवं डर दिखाई देता है, उसके विभिन्न कारणों में से एक कारण यह भी है कि बच्चे दैनिक जीवन या व्यवहार में इन संख्याओं की जो समझ व अवधारणा स्कूल में लेकर आते हैं वे उस समझ का पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत किये जा रहे तरीके से मिलान नहीं कर पाते हैं। इस तरह देखा जाए तो 'व्यावहारिक गणितीय ज्ञान' और 'पाठ्यपुस्तकीय गणितीय ज्ञान' में तालमेल नहीं होने के कारण बच्चे भ्रमित होते हैं। जैसे — भिन्नों की गुणा करना सिखाने में एक सामान्य तरीका यह अपनाया जाता है कि अंश की अंश से तथा हर की हर से गुणा करके दोनों गुणनफलों को क्रमशः अंतिम परिणाम के अंश गुणा तथा हर के रूप में लिखते हैं। परंतु क्या इस तरीके से बच्चों को भिन्नों की गुणा की अवधारणा स्पष्ट हो जाती है? भिन्न संख्याएँ केवल 'अंश' या केवल 'हर' की संख्या को देखकर नहीं समझी जा सकती है। हमें अंश और हर दोनों के संबंध को एक साथ देखना पड़ता है, क्योंकि भिन्न संख्या वास्तव में ऊपर और नीचे लिखी जाने वाली पूर्ण संख्याओं के विशेष संयोजन के बीच संबंध है।

प्राथमिक कक्षाओं में गणित सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में अधिकांशतः भिन्न संख्या को समझना या उनके साथ काम करने में बच्चों को सामान्यतः बहुत परेशानी होती है। अतः आवश्यकता है कि सावधानीपूर्वक बच्चों के साथ भिन्न संख्याओं की समझ बनाने का प्रयास किया जाना चाहिए। बच्चे जब तक कक्षा 3 में आते हैं वे अपनी परिवेशीय जानकारी के आधार पर भिन्नों के प्रति विशेष प्रकार की समझ रखते हैं। ज़्यादातर बच्चे आधा और एक-चौथाई की अवधारणा की समझ रखते हैं, जैसे ज़्यादातर बच्चे 4 का आधा या 4 का चौथाई बता सकते हैं या 4 चीज़ों को दो बच्चों में या चार बच्चों में बाँटने की समझ रखते हैं चाहे वे इसे आधा या चौथाई न भी कहें।

भिन्न संख्याओं को अलग-अलग संदर्भों में अलग-अलग अर्थ में व्यक्त करने की वजह से बच्चों और हमें भिन्नात्मक संख्याओं को समझने में कठिनाई आती है, जैसे — कभी-कभी यह एक वस्तु के हिस्से

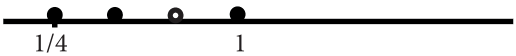
* *प्रधानाचार्य*, एस.एन.आई. कॉलेज, पिलाना, बागपत, (उ.प्र.)
** *प्रधानाचार्य*, डायट, दिलशाद गार्डन, दिल्ली

के रूप में या वस्तु समूह के हिस्से के रूप में या दूरी को दर्शाते हुए दिखती है तो कभी गणक के तौर पर जैसे — एक दर्जन का आधा।



या

कभी-कभी यह भिन्न संख्या केवल एक बिंदु को दर्शाती हुई दिखती है, जैसे — संख्या रेखा में।



कभी-कभी यह संख्या दो मात्राओं के आनुपातिक रूप को प्रदर्शित करती है।

कभी-कभी इस तरह का संख्यात्मक प्रदर्शन भाग के सवाल के रूप में नज़र आता है, जैसे —
$3 \div 10 = 3/10$

बच्चों में भिन्न संख्याओं के प्रति जो अस्पष्ट समझ या भ्रम एवं डर दिखाई देता है, उसके विभिन्न कारणों में से एक कारण यह भी होता है कि बच्चे दैनिक जीवन या व्यवहार में इन संख्याओं की जो समझ व अवधारणा स्कूल में लेकर आते हैं, वे उस समझ का पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत किये जा रहे तरीके से मिलान नहीं कर पाते हैं। इस तरह देखा जाए तो 'व्यावहारिक गणितीय ज्ञान' और 'पाठ्यपुस्तकीय गणितीय ज्ञान' में तालमेल नहीं होने के कारण बच्चे भ्रमित होते हैं तथा पूर्ण संख्याओं की अवधारणा का सुदृढ़ीकरण न होने के कारण भिन्नात्मक संख्या की अवधारणा की समझ बनाने में कठिनाई होती है। वे प्रायः अंश और हर की संख्या को अलग-अलग पूर्ण संख्या मान लेते हैं। भिन्न संख्या की अवधारणा की समझ न होने के कारण विद्यार्थियों को भिन्न संख्याओं की विभिन्न गणितीय संक्रियाओं को समझने में कठिनाई का अनुभव होता है, जैसे — भिन्नों की गुणा करना सिखाने में एक सामान्य तरीका यह अपनाया जाता है कि अंश की अंश से तथा हर की हर से गुणा करके दोनों गुणनफलों को क्रमशः अंतिम परिणाम के अंश तथा हर के रूप में लिखते हैं। परंतु क्या इस तरीके से बच्चों को भिन्नों की गुणा की अवधारणा स्पष्ट हो जाती है? यह विधि सवाल हल करने की एकमात्र विधि के रूप में जानी जाती है।

भिन्न संख्याओं में, अंश व हर को अलग करके भिन्न की अवधारणा को नहीं समझा जा सकता है, क्योंकि भिन्न संख्याएँ भी पूर्ण संख्याओं की तरह ही संख्या हैं परंतु यह पूर्ण संख्याओं के एक विशेष संयोजन के रूप में लिखी जाती हैं। अधिकांश बच्चों में भिन्न संख्याओं की समझ स्पष्ट न होने का एक कारण यह भी है कि वे भिन्न संख्याओं को एक संख्या के रूप में नहीं देखते हैं अपितु दो अंकों के रूप में देखते हैं।

बच्चों की भिन्न संख्याओं की गुणा की समझ का विकास पूर्ण संख्याओं की गुणा की संक्रिया को आधार बनाकर किया जाना चाहिए। बच्चों को पूर्ण संख्याओं की गुणा की संक्रिया से संबंधित कथनों की सत्यता की जाँच भिन्नों के संदर्भ में करके भी बच्चों में भिन्न संख्याओं की गुणा की समझ का विकास किया जा सकता है। पूर्ण संख्याओं की गुणा की संक्रिया से संबंधित कुछ कथन निम्नलिखित हो सकते हैं —

- गुणा, एक ही संख्या का बार-बार जोड़ है।
- कितने बार अर्थात् कितने समूह।

- गुणा की समस्या को किसी आयताकार रूप में चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है।
- गुणा को आसान बनाने के लिए हम बड़ी संख्या को छोटी संख्याओं के जोड़ के रूप में लिख लेते हैं।

इन कथनों का उपयोग बच्चों को भिन्न संख्याओं की गुणा सिखाने में किया जा सकता है। जैसे —

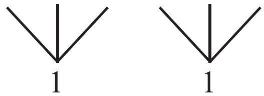
गुणा, एक ही संख्या का बार-बार जोड़ है

बच्चों को सोचने का अवसर दिया जाना चाहिए कि क्या यह कथन भिन्न संख्याओं की गुणा के लिए भी सत्य है या नहीं।

उदाहरण के लिए —

$6 \times 1/3$

$$6\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$



अतः $6 \times 1/3 = 2$

यह बिल्कुल वैसी ही प्रक्रिया है जिसमें बच्चे $2 \times 3 = 6$ या फिर $3 + 3 = 6$ कहते हैं। अतः कह सकते हैं कि भिन्नों की संख्या में भी गुणा, एक ही भिन्न संख्या का बार-बार जोड़ है।

कितनी बार अर्थात् कितने समूह

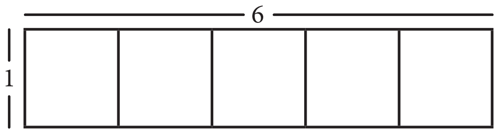
क्या उपरोक्त दोनों प्रश्नों को हम कह सकते हैं कि $6 \times 1/2$ का अर्थ है कि, 6 बार या 1/2 के 6 समूह जिनका मान 3 होगा।

$6 \times 1/3$ का अर्थ है कि, 6 बार या 1/3 के 6 समूह जिनका मान 2 होगा।

अतः कह सकते हैं कि भिन्नों की संख्या में भी गुणा, एक ही भिन्न संख्या के कितने समूह या वह संख्या कितनी बार आयी है, से है। यह प्रक्रिया पुनः एक ही भिन्न संख्या का बार-बार जोड़ है।

गुणा की समस्या को किसी आयताकार रूप में चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है

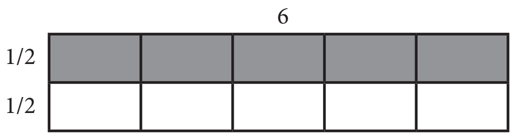
6×1 पर विचार कीजिए। इसे चित्र रूप में निम्नवत दर्शाया जा सकता है —



छोटे खानों की कुल संख्या = 6, यह 6×1 के गुणनफल के बराबर है।

छोटे खानों की कुल संख्या 6×1 के गुणनफल के बराबर है।

क्या यह प्रदर्शन भिन्न संख्याओं की गुणा की अवधारणा को समझने में भी सहायता कर सकता है? आइए, $6 \times 1/2$ को आयत के रूप में प्रदर्शित करने का प्रयास करते हैं —



बच्चों से उनके पूर्व अनुभवों के आधार पर चर्चा की जा सकती है कि 6×2 को बार-बार जोड़ के रूप में कैसे लिख सकते हैं?

संभावित उत्तर हो सकते हैं कि

$$6 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

या

$$6 \times 2 = 6 + 6$$

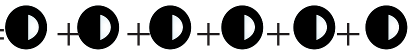
सोचो कि प्रश्न $6 \times 1/2$ को एक ही संख्या के बार-बार जोड़ के रूप में किस प्रकार लिखा जा सकता है। बच्चे शायद पूर्व अनुभवों के आधार पर यह उत्तर खोजने में सफल हो सकते हैं कि प्रश्न को एक ही संख्या के बार-बार जोड़ के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है —

$6 \times 1/2 = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2$

अब बच्चों से परिणाम पूछा जा सकता है क्योंकि —

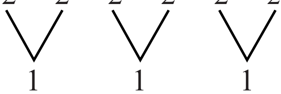
$1/2 + 1/2 = 1$

इसलिए,

$6 \times \frac{1}{2} =$ 

या

$$6 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$



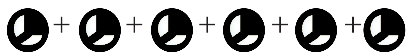
अत: $6 \times 1/2 = 3$

इस प्रक्रिया को समझना आसान है क्योंकि यह भिन्न संख्याओं की अवधारणात्मक समझ पर आधारित है।

अन्य उदाहरणों की सहायता से इस समझ को सुदृढ़ किया जा सकता है। जैसे —

$6 \times 1/3 = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$

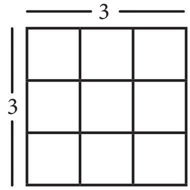
या

$6 \times \frac{1}{3} =$ 

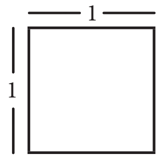
अब बच्चों से परिणाम पूछा जा सकता है क्योंकि

$1/3 + 1/3 + = 1$

इसलिए,

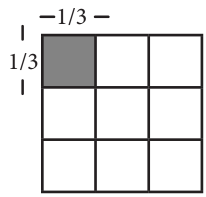


अब 1×1 को प्रदर्शित कीजिए। जैसे —



स्पष्ट है कि $1 \times 1 = 1$

अब $1/3 \times 1/3$ को इस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है —



छायांकित भाग $1/3 \times 1/3$ को प्रदर्शित करता है। उपर्युक्त प्रदर्शन से स्पष्ट है कि $1/3 \times 1/3 = 1/9$ अत: स्पष्ट है कि भिन्न संख्याओं की गुणा की समस्या को किसी आयत के रूप में लिखा जा सकता है।

गुणा की प्रक्रिया को आसान बनाने के लिए हम बड़ी संख्या को छोटी संख्याओं के जोड़ के रूप में लिख लेते हैं।

आइए, इसे एक उदाहरण की सहायता से समझते हैं — 12 × 5 का मान पता करने के लिए हम 12 को 10 + 2 लिखकर 5 से गुणा कर सकते हैं। जैसे —

$12 \times 5 = (10 + 2) \times 5$

$= 10 \times 5 + 2 \times 5$

$= 50 + 10$

$= 60$

बच्चों को सोचने का अवसर दिया जाना चाहिए कि क्या यह कथन भिन्न संख्याओं की गुणा के लिए भी कारगर है या नहीं। बच्चों द्वारा दिए गये उत्तरों पर चर्चा करते हुए कुछ उदाहरणों के माध्यम से निष्कर्ष निकाला जा सकता है। उदाहरण के लिए,

$4 \times 1/2$

$4 = 2 + 2$

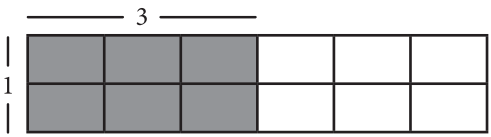
अतः

$4 \times 1/2 = (2 + 2) \times 1/2$

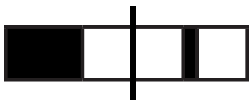
$= 2 \times 1/2 + 2 \times 1/2$

$= 1 + 1$

$= 2$



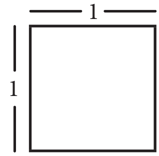
छायांकित भाग 6 × 1/2 को प्रदर्शित करता है। छायांकित भाग पूर्ण का आधा भाग है। इसे इस तरह से प्रदर्शित करने पर स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।



उपर्युक्त प्रदर्शन से स्पष्ट है कि $6 \times 1/2 = 3$

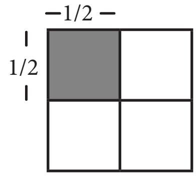
यदि दोनों संख्याएँ भिन्न संख्याएँ हों तो?

आइए, बार-बार जोड़ के संदर्भ में $1/2 \times 1/2$ को समझते हैं —



चित्र में छायांकित भाग आधे का आधा बार जोड़ है जो 1/4 के बराबर है।

आइए, $1/2 \times 1/2$ को अन्य रूप में भी समझते हैं। इससे पहले 1×1 को प्रदर्शित कीजिए। जैसे —



स्पष्ट है कि $1 \times 1 = 1$

अब $1/2 \times 1/2$ को प्रदर्शित करते हैं। जैसे —

छायांकित भाग $1/2 \times 1/2$ को प्रदर्शित करता है। छायांकित भाग पूर्ण का एक-चौथाई भाग है। उपरोक्त प्रदर्शन से स्पष्ट है कि

$1/2 \times 1/2 = 1/4$

अन्य उदाहरणों की सहायता से इस समझ को सुदृढ किया जा सकता है। जैसे —

$1/3 \times 1/3$

3×3 को प्रदर्शित करने से स्पष्ट है कि $3 \times 3 = 9$

अन्य उदाहरणों की सहायता से इस समझ को सुदृढ़ किया जा सकता है। जैसे —

$6 \times 1/2$

$6 = 2 + 2 + 2$

अतः

$6 \times 1/2 = 2 \times 1/2 + 2 \times 1/2 + 2 \times 1/2$

$= 1 + 1 + 1$

$= 3$

यहाँ 6 को 4 + 2 भी लिखा जा सकता है। जैसे —

$6 \times 1/2$

$6 = 4 + 2$

अतः

$6 \times 1/2 = 4 \times 1/2 + 2 \times 1/2$

$= 2 + 1$

$= 3$

बच्चे अपनी समझ के अनुसार 6 को कई तरीकों से 6 से छोटी संख्याओं में परिवर्तित कर सकते हैं।

गुणा संबंधी अन्य कथन बनवाकर बच्चों से उनकी सत्यता की परख करवाई जा सकती है कि ये कथन भिन्नों की गुणा पर भी लागू होते हैं कि नहीं। बच्चों के समक्ष विविध संदर्भों पर बातचीत अधिक कारगर सिद्ध हो सकती है। संदर्भ ऐसे हों जिनसे बच्चों में अवधारणात्मक स्पष्टता में बढ़ोत्तरी हो। इसके बाद बच्चे इस समझ का उपयोग प्रक्रियात्मक समझ हेतु कर सकें।

बच्चों के उनके पूर्व अनुभवों के आधार पर ही नयी अवधारणाओं को सिखाया जाना चाहिए। व्यावहारिक गणितीय ज्ञान और पुस्तकीय गणितीय ज्ञान की यह दूरी कम हो और जुड़ाव बने ताकि बच्चों के लिए कम से कम प्राथमिक स्तर का गणित और भिन्न संख्याओं की समझ सहज/सरल और आसान बने। बच्चे अपने परिवेश से जो समझ लेकर आते हैं, हम उस समझ को आधार बनाकर गणित सिखाने और अवधारणा की स्पष्ट समझ बनाने का प्रयास किया जाना चाहिए। बच्चे अपने परिवेशीय ज्ञान में इन कुछ भिन्न संख्या के शब्द और समझ लाते हैं जैसे — आधा या पाव को आधा किलो, पाव किलो, आधी रोटी आदि रूप में देखते हैं अर्थात् बच्चे इस "आधे" की अवधारणा के साथ-साथ इसकी परिभाषा भी लेकर आए हैं। कक्षा के अनुभव और कई शोध बताते हैं कि भिन्न को केवल पूर्ण के हिस्से के रूप में और समूह के हिस्से के रूप में परिचय करने से भ्रम बने रहते हैं। भिन्न की इस तरह की प्रस्तुति से बच्चे में भिन्न की मात्रा की समझ विकसित नहीं हो पाती है, फलस्वरूप वे तुलना करना, जोड़-घटा करना, गुणा-भाग जैसे क्रियाकलापों के लिये भी तार्किक कारण नहीं दे पाते जैसा कि इन संख्याओं के साथ अपेक्षित है।