

आओ गणित सीखें

प्रतीक चौरसिया*
सोमू सिंह**

गणित विषय को सामान्यतः एक जटिल विषय माना जाता है और साथ ही साथ एक महत्वपूर्ण विषय भी। परंतु जितना यह विषय महत्वपूर्ण है उतना ही तार्किक एवं खोजी प्रकृति का भी है। गणित की अपनी प्रकृति एवं उपयोगिता है तथा इसको एक क्रमबद्ध तरीके से ही सीखा जा सकता है। इसलिए छात्र गणित कैसे सीखते हैं यह जानना एक गणित शिक्षक के लिए बहुत महत्वपूर्ण है, बहुत बार छात्र एवं शिक्षक दोनों के सामने ये सामान्य समस्या आती है कि गणित को कैसे समझें या समझाएँ। इसलिए छात्रों में गणितीयकरण(Mathematisation) के विकास के लिए शिक्षक को अधिक से अधिक प्रयास करना चाहिए तथा यह भी समझना चाहिए कि गणित के सवालों में हमेशा एक पैटर्न और संबंध (Pattern and Relationship) होता है, संख्यात्मक और स्थानिक संरचनाओं का समन्वयन (Coordination of Numeric and Spatial Structures) होता है और इन पैटर्न और संबंधों का विश्लेषण करना एवं गणित के प्रश्नों को कैसे हल करना है, यह समझना आवश्यक है और तभी हम इस समस्या का निदान कर सकते हैं। यह लेख इन्हीं बिंदुओं को ध्यान में रखते हुए गणित सीखने एवं सिखाने की मूल समस्याओं को दूर करने के प्रयास में है।

स्कूल स्तर पर सिखाए जाने वाले सभी विषयों में गणित सबसे महत्वपूर्ण विषयों माना जाता है, परंतु जितना यह विषय महत्वपूर्ण है उतना ही तार्किक एवं खोजी प्रकृति का भी है। गणित सीखना एक सतत प्रक्रिया की तरह है क्योंकि इसकी प्रकृति तार्किक तथा क्रमबद्ध तरीके से सीखे जाने वाली है, जिसका मतलब है कि गणित को एक क्रमबद्ध तरीके से ही सीखा जा सकता

है। उदाहरण के तौर पर, जब किसी बच्चे को गणित में बोडमास के नियम की जानकारी न हो तो वह $2+2=4$ तो कर सकता है परंतु $2+(-2)+3\times 5=?$ जैसे सवाल करने में उसे समस्या होती है। इसी तरह जिन छात्रों को अंकगणित (Arithmetic) का कम एवं अधूरा ज्ञान होता है उन्हें बीजगणित (Algebra) सीखने में बहुत समस्या आती है। अतः अगर गणित

* शोध छात्र (एन.सी.ई.आर.टी., डॉक्टरल फ़ैलो) शिक्षा संकाय, काशी हिंदू विश्वविद्यालय, वाराणसी, उत्तर प्रदेश

** सहायक आचार्य, शिक्षा संकाय, काशी हिंदू विश्वविद्यालय, वाराणसी, उत्तर प्रदेश

को क्रमबद्ध तरीके से सीखें तो इसकी जटिलता को कम एवं आसान किया जा सकता है। जो कि सबसे बड़ी समस्या है, जितना गणित सीखना कठिन मालूम होता है उतना ही गणित सिखाना भी चुनौतीपूर्ण है। इसके लिए एक कुशल एवं प्रतिबद्ध गणित शिक्षक की ज़रूरत होती है, जो बालमन को भी समझता हो और उसकी ज़रूरत के हिसाब से गणित को प्रस्तुत करना भी जानता हो। “गणितीयकरण के लिए बच्चों की क्षमताओं का विकास करना ही गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य है” (राष्ट्रीय पाठ्यचर्चा की रूपरेखा 2005)

गणित विषय की सबसे अलग अपनी एक अनूठी शैली है जो उसकी पूरी आत्मा है। गणित सामान्यतः एक जटिल विषय माना जाता है परंतु अब एक नयी सोच के साथ गणित को पढ़ने और पढ़ाने की ज़रूरत है। गणित को सिर्फ एक विषय के रूप में देखना अब सही नहीं होगा क्योंकि आज के इस विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी के क्षेत्र में गणित की एक अहम भूमिका है, जो कि दिन-प्रतिदिन बढ़ती ही जा रही है।

गणित को एक संज्ञानात्मक खेल के रूप में प्रस्तुत करने की ज़रूरत है जो बच्चों में तर्क पूर्ण ढंग से सोचने में एवं अमूर्त प्रत्ययों को समझने में मदद करे, न कि एक ऐसे विषय की तरह जो कि जटिल है तथा केवल अधिक मानसिक योग्यता वाले छात्र ही जिसको पढ़ सकते हैं। ‘गणित से बच्चों में भय है’ इस धारणा को बदलने की ज़रूरत है और बच्चों को इसके करीब लाने की ज़रूरत है। गणित की उपयोगिता और इसकी प्रकृति को बच्चों को समझाने की ज़रूरत है। जिससे बच्चे इससे डरे नहीं, बल्कि जुड़े और स्वेच्छा से गणित को पढ़ें और इसके विभिन्न प्रत्ययों को समझने

की कोशिश करें और साथ ही गणित तथा बच्चों के बीच एक लगाव बने। बच्चों में गणित न सीखने का सबसे बड़ा कारण गणित के प्रति अरुचि है जो कि सिर्फ और सिर्फ उनको उनके दैनिक जीवन से जोड़ कर एवं विषय में रुचि पैदा करके दूर की जा सकती है।

बालमन एवं गणित

गणित विषय को सामान्यतः सभी विषयों में सबसे जटिल एवं चुनौतीपूर्ण माना गया है। एक तरफ तो बालमन है जिसकी रुचि खेल एवं मनोरंजन में अधिक होती है और दूसरी तरफ गणित जो कि ध्यान और तर्क पर ज्यादा बल देता है। जिस कारण बच्चों को गणित सीखाना एक जटिल एवं चुनौतीपूर्ण काम लगता है। अगर बालमन और गणित को एक मनोवैज्ञानिक के तौर पर देखें तो दोनों में बड़ी असमानता होती है। परंतु अगर एक शिक्षाशास्त्री एवं शिक्षक की दृष्टि से देखें तो कुछ समानताएँ भी हैं — जैसे कि खोजी प्रकृति, किसी प्रत्ययों को उचित सोपानों में सीखना आदि। गणित और बालमन दोनों ही खोजी प्रकृति के हैं तथा बच्चे किसी भी ज्ञान को क्रमबद्ध तरीके से एवं उम्र के उचित सोपान में सीखते हैं (जीन पियाज़े के संज्ञानात्मक विकास सिद्धांत के अनुसार)। इस आधार पर हम यह कह सकते हैं कि अगर गणित को बालमन से जोड़ कर एवं उसके अनुरूप सिखाया जाए तो गणित सीखना आसान एवं सरल हो सकता है और बच्चों को सरलता से गणित सिखाया जा सकता है। बच्चों को समझना, उनके मन को समझना, उनके अनुभवों को समझना एवं उन अनुभवों का इस्तेमाल करना शिक्षक के लिए बेहद ज़रूरी है और वास्तव में जब तक ये हो नहीं पायेगा

गणित सीखना हमेशा एक कठिन कार्य बना रहेगा और हमारे बच्चे जो की हमारे आने वाले कल के गणितज्ञ होंगे वे गणित से भयभीत एवं समस्याग्रस्त होते रहेंगे।

लोक प्रचलित खेलों के माध्यम से रुचिपूर्ण तरीके से बालमन को गणित सीखने के लिए तैयार किया जा सकता है। इन खेलों के नियमों, हार, जीत की गणनाओं के द्वारा भी गणितीय क्रियाएँ सीखने के अवसर प्रदान किया जाना लाभदायक साबित होगा।

रटाने का नहीं तर्कपूर्ण ढंग से समझाने का प्रयास करें

गणित विषय को सीखने में जिन प्रमुख बातों का ध्यान आता है, वह है तर्कपूर्ण तरीके से समझना क्योंकि जैसे-जैसे हम गणित सीखने की प्रक्रिया में आगे बढ़ते हैं कक्षा-दर-कक्षा एवं पाठ्यक्रम के बढ़ते विकास के साथ तर्क का स्तर भी बढ़ने लगता है। अधिकतर विद्यार्थी गणित को रटकर सीखने का प्रयास करते हैं। जो कि पूरी तरह व्यर्थ होता है क्योंकि रटा हुआ ज्ञान बहुत देर तक स्थायी नहीं रह सकता। हम यह जानते हैं कि गणित को क्रमबद्ध एवं तर्क पूर्ण तरीके से ही सीखा जा सकता है। अगर तर्क का तरीका एवं उसके उपयोग के क्रम में अवरोध आए, तो फिर आने वाले प्रत्यय को समझना बहुत कठिन हो जाता है।

उदाहरण के तौर पर —

उदाहरण 1

अगर कोई बच्चा ये रटे

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 4 = 8$$

और इस प्रक्रिया को न समझे कि

$$2 \times 2 = 2 + 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

ऐसी स्थिति में उसे पहाड़े (table) की मूल संरचना समझ में नहीं आएगी।

उदाहरण 2

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ को रटना, जैसा कि यह सूत्र है जो लगभग बच्चे रटते हैं, पर क्या इस तरह के सूत्र को बिना समझे रट लेना पर्याप्त होगा।

शिक्षक इस बात का विशेष ध्यान रखें कि बच्चे इसकी ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical Interpretation) भी समझें और क्रमबद्ध तरीका भी। जैसे —

$$(a - b)(a + b)$$

$$= a \times (a) + a \times (b) + (-b) \times a + (-b) \times (b)$$

$$= a^2 + a b - ba - b^2$$

$$= a^2 + a b - ab - b^2 \quad [ab = ba]$$

$$= a^2 - b^2 \quad [+ (ab) + (-ab) = 0]$$

इस प्रकार के सूत्र को तर्क एवं क्रमबद्ध तरीके से सीखना ज़रूरी है तभी बच्चों के गणितीय ज्ञान का स्थायी विकास हो सकता है।

उदाहरण 3

चर एवं संख्याओं के जोड़ तथा घटाव की समझ बहुत आवश्यक है

जैसे, $2 + 2 = 4$

$7 + 2 = 9$ जैसे संख्याओं को जोड़ना तो आसान है पर जब प्राकृतिक संख्या और चर का जोड़ हो जैसे,

$$x + 7 = ?, y + 6 = ?$$

$$x + y + 7 = ?$$

$$(x + y) = ?$$

$x + (y + 7) = ?$ तब समस्या होती है।



इस तरह के चर और संख्या के जोड़ सामान्यतः बच्चों में संदेह उत्पन्न करते हैं कि $x + 7$ का जोड़ क्या होगा। क्या x , 7 में जुड़ेगा? या 7, x में जुड़ेगा?, x और 7 का जोड़ कैसे होगा? इस तरह के मूल सवालों का हल गणित सिखाने के प्रारंभिक स्तर पर ही उचित तरीके से कर देना चाहिए। क्योंकि जब तक गणित के मूलभूत सिद्धांत पूरी तरह से समझ में नहीं आएँगे

छात्र हमेशा ही एक दुविधा की स्थिति में रहेंगे और उनकी रुचि और समझ गणित में विकसित नहीं होगी।

गणित(Mathematics) एवं सीढ़ी (Ladder)

सीढ़ी एवं गणित दोनों की एक खास प्रकृति है, क्रमबद्धता। गणित सीखने में आने वाली समस्याओं में क्रमबद्धता एक महत्वपूर्ण समस्या है। गणित को पढ़ाते समय अगर शिक्षक इस बात का ध्यान रखे तो वह गणित सीखने की समस्या को बहुत कम कर सकता है। अगर हम सीढ़ी को समझने का प्रयास करें तो पाते हैं कि अगर हमें सीढ़ी के सबसे आखिरी डंडे पर सुरक्षित पहुँचना है तो हमें एक-एक करके सभी डंडे पर चढ़ना होगा।

ठीक उसी तरह गणित की प्रकृति भी है और उसे समझने और समझाने में मदद तभी मिलती है जब हम एक-एक करके उसके सभी चरणों को समझें और समझाएँ अर्थात् क्रमबद्धता का अनुसरण करें। गणित के हर प्रश्न को हल करने के लिए एक क्रमबद्ध और तर्कपूर्ण तरीके की आवश्यकता होती है। अगर किसी भी एक चरण को छोड़ दिया जाए तो उनमें गलतियाँ होने की संभावना होती है और बच्चों को भी समझने में समस्या होती है क्योंकि हर चरण अगले चरण का आधार होता है और उस चरण पर ही अगले चरण का विकास होता है। उदाहरण के तौर पर

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

उपरोक्त बहुपद को हल करने के लिए किन-किन क्रम एवं पदों का क्रमबद्ध ज्ञान होना ज़रूरी है उसकी एक सीढ़ी बनाते हैं।

पहले इस बहुपद को हल करते हैं।

$$x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \dots\dots\dots \text{पद (1)}$$

$$x(x+3) + 2(x+3) = 0 \dots\dots\dots \text{पद (2)}$$

$$(x+2)(x+3) = 0 \dots\dots\dots \text{पद (3)}$$

यहाँ $(x+2)(x+3)$ बहुपद $x^2 + 5x + 6 = 0$ के दो गुणांक हैं

उपरोक्त सवाल को विधिपरक तरीके से सही करने के लिए इस सीढ़ी के प्रत्येक चरण का ज्ञान एवं अनुसरण होना ज़रूरी है। तब ही बच्चे गुणनखंड (Factorisation) की इस विधि को पूर्ण रूप से समझ सकेंगे और आगे के सवालों में उपयोग कर सकेंगे।

- गुणनखंड विधि (Factorisation Method) का ज्ञान होना।
- चर संख्याओं के पदों के जोड़ का ज्ञान होना। जैसे — $[5x = 3x + 2x]$
- लघुत्तम समापवर्तक (Least Common Multiple L.C.M.) का ज्ञान होना।
- पच्छांतर (Transposition) का ज्ञान होना।
- कोष्ठक (Paranthesis) गुण का ज्ञान होना।
- जोड़ (Addition) का ज्ञान होना।
- चर (variable) एवं उसके उपयोग का ज्ञान होना।

ऊपर दिए उदाहरण में शिक्षक इन विशेष सोच प्रक्रियाओं को विकसित करने के लिए इस्तेमाल कर सकते हैं।

गणित सिखाने का उपयुक्त वातावरण बनाना
शिक्षक पद एक बेहद जिम्मेदारी वाला पद है और जब बात बच्चों को गणित पढ़ाने की हो तो यह और भी जिम्मेदारी का काम है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 में भी इस पर चर्चा हुई है कि शिक्षक की भूमिका क्या

हो। जैसे कि पहले शिक्षक को पढ़ाने वाला व्यक्ति और पूर्ण ज्ञान देने वाला माना जाता रहा है। परंतु एन.सी.एफ़ 2005 ने इस पर बल देते हुए यह कहा है कि शिक्षक की भूमिका अब एक सुगमकर्ता (सुविधा प्रदान करने वाला facilitator) की तरह हो। जो कि बच्चों को ज्ञान तक पहुँचने में सहायता करे, न कि ज्ञान को थोपे और लादे। साथ ही साथ गणित को रुचिकर और आसान बनाने के लिए उनके दैनिक जीवन के अनुभवों से जोड़ें।

अगर इन सभी बातों को एक सार में समझें तो यह सभी बातें इस ओर बल देती है कि हमें गणितीयकरण (Mathematisation) पर ज़ोर देना होगा और बतौर गणित शिक्षक यह ध्येय बनाना होगा कि बच्चे गणित को अपनी मूल प्रकृति के हिसाब से ही सीखें और समझें। इन सब प्रक्रिया के दौरान उनकी रुचि गणित सीखने में बनी रहे और वह गणित को अपने दैनिक जीवन में भी उपयोग कर सकें।

गणित में बहुत सारे ऐसे प्रत्यय हैं जिनको बच्चों के दैनिक जीवन से जोड़ना कठिन होता है। जैसे कि चर, संख्या, समीकरण आदि। इस तरह के अमूर्त प्रत्ययों को पढ़ाने के लिए शिक्षक कुछ नवीन विधियों का उपयोग कर सकते हैं।

पैटर्न (Pattern) एवं तर्क (logic) को समझें
गणित का मूल उद्देश्य यह है कि विद्यार्थियों को उच्च गणितीय सोच प्राप्त हो सके। अगर वे शिक्षक द्वारा उपयुक्त प्रश्नों और संकेतों के उचित उपयोग से केंद्रित होते हैं तो वह ज्ञान अधिक उपयोगी एवं स्थायी होते हैं। गणित के सभी प्रत्ययों में कुछ ना कुछ

तर्क जरूर होता है, जिसका पूरा विस्तृत वर्णन जरूरी होता है। एक शिक्षक के लिए यह बेहद महत्वपूर्ण है कि वो यह समझे कि बच्चे गणित कैसे सीखते हैं एवं पैटर्न कैसे सीखते हैं? आमतौर पर छोटे बच्चे पहले पैटर्न को देखते हैं और फिर उसको अपने आस-पास के वातावरण से जोड़ने का प्रयास करते हैं और तब वर्गीकरण करना, गिनना, संख्याकरण करना और व्यवहारिक रूप में सामान्यीकरण करना आता है।

तर्क एवं पैटर्न विभिन्न प्रत्ययों की विशेषताओं से संबंधित हैं। प्रत्येक सवाल में अपना एक क्रम और प्रस्तुतीकरण के अनुसार उनके गुणों में एक पैटर्न होता है। हम लगभग हर सवालों में इस प्रकार के पैटर्न को देखते हैं।

उदाहरण के लिए नीचे दिए गए चित्र को देखते हैं। इसमें एक चित्र में चार चिह्न हैं, जिनमें प्रत्येक पद एक निश्चित तर्क एवं पैटर्न के अनुसार बदलते हैं और हम उस संख्या को चिह्नित करने के लिए एकाधिक विकल्प वाले उत्तरों में से एक का चयन करते हैं, जो कि अगला क्रम होता है। गणित के पैटर्न एक नियम या

नियमों के अनुसार दोहराते हुए होते हैं। किसी नियम की गणना या हल करने का एक नियम एवं निर्धारित तरीका होता है। उदाहरण के तौर पर नीचे दिए गए पैटर्न को देखें —

अगर हम पैटर्न 1 को देखें तो इसमें एक खास किस्म का नियम देखने को मिलेगा। पहले में 1 गोला, दूसरे में 3 गोले, तीसरे में 5 गोले एवं चौथे चित्र में 7 गोले हैं।

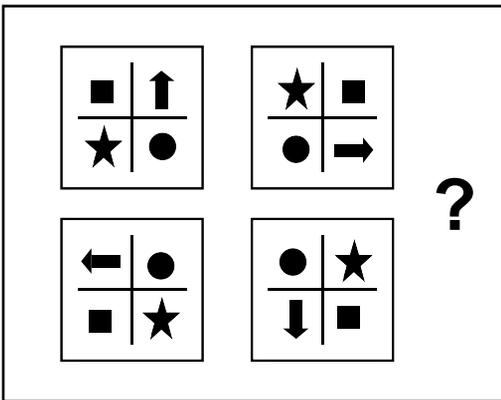
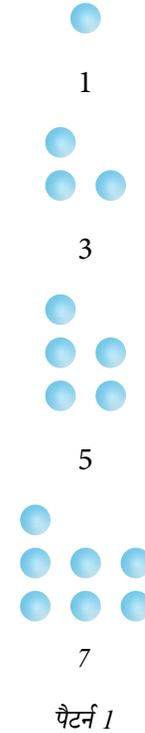
1

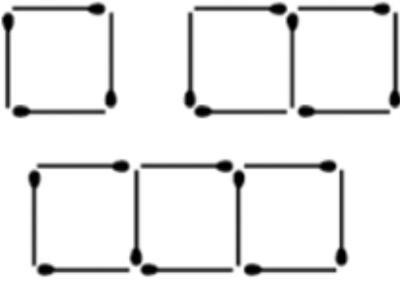
$$1 + 2 = 3$$

$$3 + 2 = 5$$

$$5 + 2 = 7$$

प्रत्येक चरण में 2 का जोड़ बढ़ता चला जा रहा है।





पैटर्न 2

माचिस की तीलियों पर आधारित

इस तरह माचिस की इन तीलियों के पैटर्न को देखें तो इसमें भी हमें एक खास नियम देखने को मिलेगा। जैसे चार तीलियों से मिलकर एक चौकोर बन रहा है। पहले, दूसरे, और तीसरे, चरण में माचिस की तीलियों की संख्या किस प्रकार बढ़ रही है और एक चौकोर के चारों ओर अगर एक एक व्यक्ति को एक तीलियों के तरफ खड़ा होना हो तो कितने लोग खड़े हो सकते हैं। दिए गए दो उदाहरण में जिस तरह से आपने पैटर्न और तर्क का समन्वय देखा ठीक ऐसे ही हर सवाल में भिन्न-भिन्न प्रकार के तर्क एवं पैटर्न होते हैं जिनको समझना और सामान्यीकरण करना बहुत आवश्यक होता है।

निष्कर्ष

गणित की कठिनाइयों को कम करने एवं आसान बनाने के लिए यह ज़रूरी है कि इन सभी माध्यम या विधि

का प्रयोग कर इसे रुचि पूर्ण बनाना चाहिए। गणित विषय को सभी बच्चों के लिए सरल एवं सामान्य रूप से बनाने के लिए उसके प्रस्तुतीकरण पर विशेष ध्यान देने की ज़रूरत है। गणित को गीत की तरह बनाने की ज़रूरत है, जिसको हर बच्चा सुनना चाहे और उसकी अपनी रुचि गणित में विकसित हो। अब गणित को एक खेल की तरह से बनाना होगा जिसमें शिक्षक की भूमिका बहुत महत्वपूर्ण है, कुछ नवीन गणित शिक्षण विधियों पर विचार करने की ज़रूरत है। अब इस विचारधारा में बदलाव की ज़रूरत है और बिलकुल प्रारंभ से ही बच्चों को गणित से भयमुक्त बनाने की ज़रूरत है क्योंकि गणित सिखाने और सीखने में जितनी बाधा गणित का मूल स्वरूप नहीं करता उससे ज्यादा मनोवैज्ञानिक भ्रान्तियाँ गणित सीखने में समस्या पैदा करती हैं, जैसे — ‘गणित से भय’, ‘गणित एक जटिल विषय है’, ‘गणित बहुत ही अमूर्त विषय है’ आदि। गणित शिक्षक को यह बेहद ध्यान देने की ज़रूरत है कि बच्चे रटने के बजाए गणित विषय की मूल संरचना और उससे विकसित होने वाले आयामों को समझें, जैसे — गणना से सार बनाना, अनुमानों का उपयोग, संख्यात्मक और स्थानिक संरचनाओं का समन्वयन, अनुक्रम पद के स्थानिक विन्यास के बारे में सोचना, चिंतनशील तर्क आदि। विद्यार्थियों का गणित के प्रति

चौकोर बॉक्स	1	2	3	4	5	6	7	n
माचिस की तीलियों की संख्या	4	7	10	?					?
व्यक्ति जो खड़े हो सकते हैं	4	6	8	?					

दृष्टिकोण बचपन से ही सकारात्मक बनाना होगा। वे ये न मानना शुरू करें कि गणित बहुत ही कठिन विषय है, गणित विषय में असफल होने की संभावना अधिक है। बच्चों के मन में यह भावना व सोच विकसित करने की बहुत आवश्यकता है कि गणित की विषयवस्तु हमारे दैनिक जीवन व स्थानीय परिवेश से संबंधित है।

आज गणित शिक्षण में बहुत सारे विकास हो चुके हैं और काफ़ी सुधार भी हुआ है, पर अब भी विद्यालय स्तर पर गणित में सुधार की सबसे ज्यादा आवश्यकता महसूस होती है और गणित को बेहतर और प्रभावशाली तरीके से कैसे पढ़ाया जाए यह अब भी एक जटिल समस्या के रूप में व्याप्त है।

संदर्भ

एन.सी.ई.आर.टी. 2006. *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005. फ़ोकस समूह का आधार पत्र. 'गणित शिक्षण'.* एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली.

———. 2005. *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005.* एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली.

Home grown learners, Making Math Fun!! - The Number Ladder Game <https://in.pinterest.com>

<https://illuminations.nctm.org/uploadedImages/Content/Lessons/Images/preK-2/597 GreenDots.jpg>