बीजीय तर्क
बीजगणित शिक्षण में एक नवाचार दृष्टिकोण

प्रतीक चौरसिया*

सामान्य रूप से गणित सीखना अन्य विषयों की तुलना में एक तार्किक एवं प्रायोगिक प्रक्रिया है। गणित की विभिन्न शाखाओं में बीजगणित को मुखतः तार्किक एवं अमूर्त रूप वाला माना जाता है। गणित शिक्षण एक विशेष चुनौती के रूप में उभर रहा है। बीजगणितीय शिक्षण एक अलग शैली का गणित शिक्षण है, जिसके अध्ययन हेतु विद्यार्थियों में तर्कशीलता, संबंधों का अध्ययन करना, पैटर्न का विश्लेषण करना एवं अमूर्त से मूर्त निष्कर्षों पर पहुँचना सिखाया जाता है। बीजगणितीय शिक्षण की मुख्य चुनौती बीजगणित का मूल स्वभाव है, जो कि गणित की अन्य शाखाओं से भिन्न है। बीजगणित के प्रश्नों में चर, पैटर्न एवं अमूर्त संबंधों का एक समावेश (इंक्लूज़न ऑफ़ वैरीएबल, पैटर्न एंड एब्स्ट्रैक रिलेशनशिप) होता है। साथ ही साथ संख्यात्मक और स्थानिक संरचनाओं का समन्वयन (कोओरडिनेशन ऑफ़ न्यूमेरिक एंड स्पेशअल स्ट्रक्चर) होता है। इन पैटर्न और संबंधों का विश्लेषण करना एवं गणित के प्रश्नों को कैसे हल करना है, यह समझना आवश्यक है तथा इनसे जुड़ी समस्याओं का निदान करना भी ज़रूरी है। यह लेख बीजगणितीय शिक्षण को सरल, सुगम एवं बाल-केंद्रित बनाने के लिए बीजीय तर्क (एल्जेब्रिक रीज़निंग) के विभिन्न आयामों एवं इसके प्रयोग से बीजगणित के पठन-पाठन में गुणवत्ता लाने हेतु केंद्रित है।

बीजीय तर्क गणित शिक्षण में एक नवाचार बनकर उभरा है, जिससे न केवल बीजगणितीय पठन-पाठन में सुधार किया जा सकता है, साथ ही साथ बीजगणितीय शिक्षण में विद्यार्थियों की रुचि एवं उनकी उपलब्धि को भी सुधारा जा सकता है। बीजीय तर्क सामान्य रूप से गणित में उपयोग होने वाले कौशलों का एक समूह (सेट ऑफ़ मैथमेटिकल स्किल्स) है, जिसमें सभी गणितीय कौशल समाहित हैं, जैसे— उत्तर से निष्कर्ष तक एवं निष्कर्ष से उत्तर तक पहुँचना, दिए गए पैटर्न को समझना एवं आगे के पैटर्न का विश्लेषण करना आदि। गणित सीखने के दौरान समस्या हल करना एक महत्वपूर्ण क्षमता है, समस्या समाधान में गणित की विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए नए तरीकों से सोचने की प्रक्रिया शामिल है। गणितीय प्रश्नों को हल करते समय कुछ बुनियादी कौशल और क्षमताएँ हमेशा विकसित होती हैं, जैसे— तर्कपूर्ण चिंतन, समस्या को सुलझाने और रचनात्मक सोच के प्रयोग का कौशल। गणित में मूल रूप से स्वयं सिद्धि और प्रमेय (एक्ज़िअम्स एंड थ्योरम्स), जैसे— बीजगणित और

**असिस्टेंट प्रोफ़ेसर*, शिक्षा विभाग, मिज़ोरम विश्वविद्यालय, आइजोल, मिज़ोरम 796004

© NCERT not to be republished

ज्यामिति के मौलिक प्रमेय, परिभाषा, सूत्र, विधियाँ और एल्गोरिद्म शामिल हैं। इन घटकों के बिना गणित निश्चित रूप से एक विषय के रूप में स्थापित नहीं हो सकता था। ये सभी गणित के पाठ्यक्रम की बुनियादी एवं आवश्यक संरचना की पहली इकाई है। गणित में समस्या समाधान का प्रयोग उस प्रक्रिया के रूप में किया जाता है जहाँ विद्यार्थी के पास प्रश्न को हल करने के लिए तत्काल कोई स्पष्ट तरीका नहीं होता है, न ही कोई निर्धारित एल्गोरिद्म होता है, जिसका उपयोग करके वे उत्तर प्राप्त कर सकें।

शिक्षक की भूमिका बच्चों को सीखने के क्रम में एक सुगमकर्ता के रूप में अवसर प्रदान करना होता है, गणितीयकरण की प्रक्रिया में विद्यार्थियों को सहयोग देना तथा उनकी गणितीय क्षमताओं का विकास करना ही गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य है (*राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005*)। इस क्रम में बीजीय तर्क एक महत्वपूर्ण भूमिका निभा सकता है तथा विद्यार्थियों में गणितीयकरण की प्रक्रिया को बढ़ावा दे सकता है।

इसी संदर्भ में एन.सी.टी.एम. (नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथमेटिक्स, 2004) के अध्यक्ष के अनुसार, विद्यार्थियों के बीच बीजीय तर्क का विकास एक प्रक्रिया है, घटना नहीं है। इस प्रक्रिया में एक सकारात्मक एवं प्रेरक विद्यालयी गणित पाठ्यक्रम का अनुभव शामिल है। एन.सी.टी.एम. ने विद्यालयी शिक्षा के दौरान प्री-प्राइमरी से हाई स्कूल तक बीजीय तर्क को विकसित करने की अवधारणा पर ध्यान केंद्रित किया है। एन.सी.टी.एम. ने गणितीय झुकाव को मज़बूत करने के लिए विद्यार्थियों के बीच बीजीय तर्क के विकास और समझ का समर्थन किया है। यह विद्यार्थियों के बीजगणितीय उपलब्धि को बढ़ाने और अंततः गणित में सुधार करने के लिए बीजीय तर्क को समझने और सीखने पर ज़ोर देता है। बीजीय सोच तब प्रकट होती है जब कोई आँकड़ों और गणितीय संबंधों के बारे में सामान्यीकरण स्थापित करता है, अनुमान लगाने और तर्क के माध्यम से इन प्रक्रियाओं को एक औपचारिक भाषा में व्यक्त करता है। यह सामान्यीकरण प्रक्रिया अंकगणित, ज्यामितीय और गणितीय मॉडलिंग में भी हो सकती है। बीजगणितीय तर्क, बीजगणित एवं अंकगणित के मध्य संज्ञानात्मक खालीपन को भरता है तथा मात्राओं के बीच संबंधों के पैटर्न का वर्णन करने में सहायक होता है, जो कि अंकगणित के विपरीत है। बीजीय तर्क गणितीय विचारों को सामान्य बनाने और गणितीय संरचनाओं की पहचान करने में भी सहायता करता है।

बीजीय तर्क—एक परिचय

बीजगणित शिक्षण, गणित की अन्य शाखाओं से भिन्न है। बीजगणित शिक्षण मुख्य रूप से विद्यार्थियों में उन नवीन चुनौतियों को प्रस्तुत करता है, जो चुनौतियाँ विद्यार्थियों को अंकगणित में कम ही मिलती हैं। उदाहरण के तौर पर चर को समझना एवं चर पर आधारित विभिन्न समीकरणों को समझना। अंकगणित मूल रूप से संख्या एवं संख्याओं पर आधारित गणितीय क्रियाओं पर निर्भर होता है। परंतु जब विद्यार्थी अंकगणित से बीजगणित सीखने की ओर बढ़ता है, तो बीजगणित सीखने की प्रक्रिया में विद्यार्थी संख्याओं के बदले चर, जैसे कि, x, y, z आदि प्रत्ययों से रूबरू होता है। बीजगणित शिक्षण की प्रवृत्ति एवं इसके प्रत्यय मूल रूप से तार्किक एवं चिंतन प्रक्रिया पर आधारित होते हैं। बीजगणित

© NCERT not to be republished

शिक्षण ना केवल विद्यार्थियों की तार्किक सोच को विकसित करता है, अपितु संख्यात्मक और स्थानिक संरचनाओं का समन्वयन (कोओरडिनेशन ऑफ़ न्यूमरिक एंड स्पेशअल स्ट्रक्चर्स) की समझ को भी विकसित करता है। बीजीय तर्क गणितीय सोच और तर्क का एक महत्वपूर्ण और मौलिक तत्व है। इसमें शुरू में संख्याओं, वस्तुओं और ज्यामितीय आकृतियों के बीच पैटर्न और सामान्य गणितीय संबंधों को पहचानना शामिल है। मुख्य रूप से बीजगणित में विद्यार्थी ऐसे प्रश्नों का अध्ययन करते हैं जो उन्हें अपने सामान्य जीवन में सरलता से दिखाई नहीं पड़ते। ऐसी परिस्थिति में एक बालमन के विषय की जटिलता एवं विषय के स्वरूप से मोह भंग होना, अरुचि पैदा होना एवं उसकी गणितीय उपलब्धि में गिरावट आना स्वाभाविक है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा किया गया नेशनल अचीवमेंट सर्वे, 2017 भी इन्हीं तथ्यों की पुष्टि करता है। नेशनल अचीवमेंट सर्वे में कक्षा 5, 6, 7 एवं 8 की गणितीय उपलब्धि का मूल विश्लेषण किया जाए तो मुख्य रूप से पाएँगे कि विद्यार्थी की उपलब्धि कक्षा 5 के बाद कक्षा 6 की तुलना में कम होती जाती है तथा कक्षा 7 के बाद कक्षा 8 में भी कम हो जाती है। गणितीय उपलब्धि में आने वाली यह गिरावट मुख्य रूप से बीजगणित में आने वाली कठिनाइयों की वजह से घटित होती है।

इन सभी प्रकार की चुनौतियों का सामना करने के लिए बीजीय तर्क एक बेहद उपयुक्त साधन है, जिसके प्रयोग से बीजगणितीय शिक्षण को रुचिपूर्ण बनाया जा सकता है। नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथमेटिक्स (2000) द्वारा प्रकाशित एक चर्चा दस्तावेज़ में विद्यालयी बीजगणित के लिए चार प्रत्ययों का वर्णन किया गया है—फ़ंक्शन और संबंध, मॉडलिंग, संरचना, भाषा और प्रतिनिधित्व। साथ ही साथ बीजगणित के प्रति विद्यार्थियों में रुचि एवं नवीन गणितीय चुनौतियों का सामना करने की अभिवृत्ति उत्पन्न की जा सकती है। बीजीय तर्क के उपयोग से गणितीय उपलब्धि एवं बीजगणितीय उपलब्धि दोनों को साथ-साथ बढ़ाया जा सकता है। बीजगणितीय तर्क जैसा कि नाम से स्पष्ट है कि इसके उपयोग में तर्क आधारित प्रक्रिया बीजगणित सीखने में प्रयोग की जाती है, ऐसा पाया गया है कि सामान्यतः बीजगणित सीखने के दौरान प्रत्येक विद्यार्थी इन तर्कों का इस्तेमाल कहीं न कहीं बीजगणित के सवालों में करता है तथा इन सभी बीजगणितीय समस्याओं का क्रमबद्ध एवं तार्किक समाधान निकालने का प्रयास करता है।

बीजगणितीय तर्क में विद्यार्थी उन सभी तर्कों एवं गणितीय कौशलों का प्रयोग विभिन्न परिस्थितियों में भिन्न-भिन्न प्रकार से करते हैं।

किरन (1996) के अनुसार विद्यालयी बीजगणित को विद्यार्थियों की गतिविधियों के अनुसार श्रेणीबद्ध किया गया है, जो कि परिवर्तनकारी गतिविधियाँ और वैश्विक मेटा-स्तर की गतिविधियाँ हैं। इन गतिविधियों को बीजीय तर्क की सहायता से प्रोत्साहित किया जा सकता है।

बीजीय तर्क के बारे में विभिन्न शिक्षाविदों एवं गणितज्ञों के अपने-अपने विचार हैं। सभी विद्वानों के मत एक बिंदु पर मेल खाते हैं कि बीजगणितीय तर्क बीजगणितीय शिक्षण में सहायक हैं तथा इसके स्वरूप बदल सकते हैं। अलग-अलग क्रियान्वयन

प्रणाली हो सकती है, परंतु बीजगणितीय तर्क पूरी तरह से ना केवल बीजगणित को एवं समस्त गणित शिक्षण को प्रभावी बनाने एवं विद्यार्थियों के गणित की उपलब्धि को बढ़ाने में सहायक है।

बीजीय तर्क पर आधारित विभिन्न शोध इस परिणाम की ओर सूचक हैं कि अगर कक्षा में शिक्षक द्वारा बीजीय तर्क का उचित उपयोग एवं विद्यार्थियों द्वारा परिस्थिति के अनुसार इसका उपयोग किया जाए तो यह बीजगणित शिक्षण को बेहद सरल एवं रुचिकर बनाता है।

बीजीय तर्क के कुछ प्रमुख आयाम

विभिन्न शोध कार्यों द्वारा बीजीय तर्क के कुछ प्रमुख आयाम निकलकर आए हैं, जिनका इस्तेमाल करने पर विद्यार्थी विशेष रूप से लाभान्वित हो सकते हैं, जैसे—

- एबिलिटी ऑफ़ रिवर्सिबिलिटी या करना—पूर्ववत करना;
- गणना से सार बनाना;
- फंक्शन को प्रस्तुत करने या प्रतिनिधि करने के लिए नियम बनाना;
- गणितीय सामान्यीकरण;
- संरचनात्मक समझ या बढ़ते पैटर्न को समझना;
- अनुमानों का उपयोग;
- विद्यालयी स्तर पर बीजगणित शिक्षण की मूल चुनौतियाँ।

वर्तमान समय में गणित सीखने एवं सिखाने के तरीकों में अब काफी हद तक बदलाव हुआ है। सीखने के विभिन तरीके अब मुख्यतः बाल-केंद्रित शिक्षाशास्त्र पर आधारित हो गए हैं। सीखने का बाल-केंद्रित दृष्टिकोण विद्यार्थियों को एक खुला मंच प्रदान करता है और उन्हें अपना ज्ञान स्वतः निर्मित करने के उपयुक्त अवसर भी प्रदान करता है। वर्तमान समय में सूचना और संचार प्रौद्योगिकी की सहायता से गणित शिक्षा के सुधार पर काफी हद तक ध्यान दिया जा रहा है। गणित शिक्षण में आने वाली कठिनाई मुख्य रूप से गणित की प्रकृति के कारण ही होती है, जैसे—अनुक्रमिक प्रकृति (सिक्वेंशियल नेचर), अमूर्त प्रकृति (एब्स्ट्रैक्ट नेचर), पदानुक्रमित प्रकृति (हाइरारकिकल नेचर), तर्क आधारित प्रकृति (लोजिक बेस्ड नेचर) आदि।

स्कूली स्तर पर बीजगणित विद्यार्थियों के लिए अपनी प्रतीकात्मक प्रस्तुति, अज्ञात संख्या, चर, समीकरणों, फ़ंक्शन और अमूर्तता का उपयोग होने के कारण एक नई चुनौती बन जाता है। समीकरणों एवं शब्द समस्याओं के समाधान निकालने से मूलरूप से समस्याओं को हल करने की क्षमता को बढ़ावा दिया जाता है और पोषित किया जाता है। निष्कर्षतः कहा जा सकता है कि समस्या को हल करना और बीजगणित सीखना एक-दूसरे के साथ बेहद निकटता से संबंधित है।

चौरसिया (2016) ने अपने शोध पत्र, जो कि प्राथमिक स्तर पर बीजीय तर्क— अंकगणित और बीजगणित के बीच अंतराल को भरने पर आधारित है, में पाया कि अंकगणित और बीजगणित के बीच अंतराल को भरने में बीजीय तर्क महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। क्योंकि यह बीजगणित के सोचने के तरीकों को अंकगणित के साथ जोड़ता है। साथ ही साथ अगर हम बच्चों की बीजगणितीय उपलब्धि को बढ़ाना चाहते हैं तो हमारे शिक्षकों के लिए

© NCERT not to be republished

आवश्यक है कि वे प्रारंभिक वर्षों में बीजीय तर्क को प्रोत्साहित करें और विद्यार्थियों की उम्र के अनुसार सोचने के तरीकों को बढ़ावा दें।

विद्यालयी स्तर पर बीजगणित शिक्षण की कुछ बुनियादी समस्याएँ हैं। विद्यार्थी अंकगणित के पूर्व ज्ञान का प्रयोग बीजगणित में उपयोग करते हैं और समस्याओं का सामना करते हैं।

जैसे, 2 + 2 = 4 एक सामान्य जोड़ है, परंतु जब यह जोड़ बीजगणित में चरों के साथ करते हैं तो विद्यार्थियों को समस्या होती है।

जैसे, $x + x = 2x$ तथा $x \times x = x^2$ इन दोनों सवालों को हल करने में चरों के गुणन एवं जोड़ की प्रक्रिया के अंतर को पूर्णतः समझना ज़रूरी है। इसी प्रकार की मैलिक समस्याओं को कम करने में बीजीय तर्क महत्वपूर्ण भूमिका निभा सकता है। बीजगणितीय तर्क एक प्रक्रिया है जिसमें विद्यार्थी गणितीय विचारों को एक समस्या समूह से सामान्यीकृत करते हैं और उन सामान्यीकरणों को तर्क के आधार पर स्थापित करते हैं और उन्हें आयु के अनुसार उचित तरीकों से व्यक्त करते हैं।

गणित में ऐसे भी सवाल होते हैं, जहाँ उत्तर से हम प्रश्न की ओर बढ़ते हैं। इस प्रक्रिया को हम मूल रूप से 'एबिलिटी ऑफ़ रिवर्सिबिलिटी' कहते हैं। उदाहरण के तौर पर जब किसी बीजीय व्यंजक का गुणनखंड करते हैं तो उत्तर के रूप में हमें उस बीजीय व्यंजक के गुणांक प्राप्त होते हैं। जब हम उन गुणांक की सहायता से पुनः बीजीय व्यंजक का निर्माण करते हैं तो हम रिवर्सिबिलिटी की प्रक्रिया से गुज़रते हैं, जिसमें बीजीय तर्क के आयाम का उपयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए,

जहाँ $ax^2 + bx + c$ में,

x^2 का गुणांक = a

x का गुणांक = b

c = अचर पद

यहाँ $(ax+c)(x+1)$ बीजीय व्यंजक के दो गुणनखंड हैं।

पुनः अगर देखें कि $(ax+c)(x+1)$ का आपस में गुणन करें तो वापस से $ax^2+ bx + c$ प्राप्त होगा। इस प्रक्रिया को अगर व्यापक रूप में देखा जाए तो गणित सीखने, सिखाने एवं गणित की बहुत सारी विधाओं में इस क्षमता का उपयोग विद्यार्थी करते हैं। नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथमेटिक्स (2000) भी इस विचार को रेखांकित करता है कि माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों के लिए बीजीय तर्क मात्रात्मक संबंधों के प्रतिनिधित्व से संबंधित अवधारणाओं और कौशलों के एक समूह के प्रोयग से सोचने की शैली विकसित करने पर ज़ोर देता है।

बीजीय तर्क के उपयोग से बीजगणित शिक्षण

गणित शिक्षण एवं बीजगणितीय शिक्षण के लिए समय-समय पर विभिन्न प्रकार की शिक्षण विधियाँ उपयोग होती रही हैं। वर्तमान समय में गणित शिक्षण एक नवाचार के चरण से गुज़र रहा है और साथ ही साथ बेहतर एवं बाल-केंद्रित होने के पथ पर अग्रसर है। स्कूली गणित विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के तर्क करने एवं अभ्यास करने का पर्याप्त अवसर प्रदान करता है। यह वह महत्वपूर्ण समय है जब हम उनकी बीजगणितीय सोच विकसित कर सकते हैं। ये अवसर विशेष रूप से विद्यालयी स्तर पर अंकगणित और बीजगणित के बीच संबंध बनाने

© NCERT not to be republished

और इन्हें मज़बूत करने के अवसरों के लिए सबसे उपयुक्त होता है। विद्यार्थियों की बीजगणितीय सोच के विकास को बढ़ावा देने से उनके गणितीय ज्ञान एवं उसके उपयोग को बुनियादी रूप से मज़बूती प्रदान की जा सकेगी। शिक्षकों के लिए यह अति ध्यान देने वाला समय है, जिनमें विद्यार्थियों के मानिसक विकास कि अवस्था प्रबल होती है एवं जिसके लिए क्रमबद्ध तरीके से मार्गदर्शन और सुझाव प्रदान करना आवश्यक है।

कारपेंटर और लेवी (2000) ने प्राथमिक स्तर के विद्यार्थियों के बीच बीजीय तर्क की अवधारणाओं को विकसित करने पर एक शोध किया। यह शोध बीजगणित सीखने के मुद्दों की पहचान करने का प्रयास करता है और साथ ही साथ बीजगणित के प्रश्नों को हल करने में प्रक्रिया आधारित दृष्टिकोण पर केंद्रित है। यह अध्ययन प्राथमिक कक्षा के विद्यार्थियों के बीच बीजगणित सीखने से संबंधित कई मौलिक सवालों के जवाब देने की कोशिश करता है। अध्ययन के निष्कर्षों से पता चला है कि पहली और दूसरी कक्षा के कई विद्यार्थी तथ्यों को बताने एवं समझने में कठिनाई का सामना करते हैं। बीजीय समीकरणों को हल करते समय वे जिन तरीकों का उपयोग करते हैं, उसकी उपयुक्तता एवं आवश्यकता को पहचान करने में भी उन्हें समस्या होती है। अध्ययन से यह प्राप्त होता है कि प्राथमिक स्तर के विद्यार्थियों ने स्वीकार किया कि परिणामों को सत्यापित करने के लिए एकल उदाहरण पर्याप्त नहीं था। निष्कर्षतः यह पाया गया की प्राथमिक स्तर के विद्याथियों में तार्किक तरीके से सोचने के कौशल एवं अनुमानों को उचित सिद्ध करने के कौशल (जस्टिफाइंग कंजक्चर्स) को विकसित किया जा सकता है। अध्ययन बीजगणितीय तर्क के महत्व के साथ-साथ बीजगणित सीखने में अनुमानों (कंजक्चर्स) की भूमिका को भी सिद्ध करता है।

कोएडिंगर और तेराओ (2002) ने चित्रों का उपयोग करते हुए पूर्व-बीजीय तर्क का समर्थन करने के लिए संज्ञानात्मक कार्य विश्लेषण पर आधारित एक अध्ययन किया। पूर्व-बीजगणितीय मात्रात्मक तर्क को बेहतर बनाने और बढ़ावा देने के लिए सीखने में सचित्र प्रस्तुति पर चर्चा की गई। गणित पाठ्यक्रम के कक्षा 6 के विद्यार्थियों पर चित्र से बीजगणित सीखने पर विशेष बल दिया गया है। यह रणनीति विद्यार्थियों का इस बात का समर्थन करती है कि चित्रों का प्रस्तुतीकरण भी बीजीय तर्क के विकास में सहयोग करता है।

बीजगणित में इस प्रकार की सचित्र प्रस्तुति एवं बीजीय तर्क को बेहतर बनाने के प्रोत्साहन को 'संरचनात्मक समझ या बढ़ते पैटर्न को समझना' के रूप में भी जाना जाता है।

सभी प्रमुख शोधों के निष्कर्षों को यदि ध्यान से देखें तो यह बात स्पष्ट रूप से ज्ञात होती है कि बीजगणित शिक्षण में बीजीय तर्क का एक महत्वपूर्ण स्थान है। बीजीय तर्क के उपयोग से बीजगणितीय उपलब्धि में निश्चित ही सुधार देखने को मिलता है। बीजीय तर्क के विभिन आयामों को ध्यान से देखें और समझने का प्रयास करें तो यह बात स्पष्ट रूप से दिखती है कि ये सभी न केवल बीजगणित सीखने में सहायता करते हैं, बल्कि गणित शिक्षण में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। बीजीय तर्क गणित की विभिन्न समस्याओं को सीखने और हल करने के दौरान एक

© NCERT not to be republished

महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। बीजीय तर्क समाधान तक पहुँचने की प्रक्रिया में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है, क्योंकि यह कार्यात्मक सोच पर ध्यान केंद्रित करता है, जिसके माध्यम से विद्यार्थी बीजीय तर्क का विकास करते हैं। तर्क प्रयोग की गणितीय प्रक्रिया में अनुमानों की मदद से प्रश्नों को हल करना एवं पैटर्न और संबंध का विश्लेषण करना जैसी क्रियाएँ शामिल हैं।

गणितीय उपलब्धि को बेहतर करने के लिए सबसे महत्वपूर्ण रूप से शिक्षकों और विद्यार्थियों के लिए बीजीय तर्क एक महत्वपूर्ण संसाधन है। बीजीय तर्क की मदद से शिक्षक विद्यार्थियों में सृजनात्मक तरीकों से सोचने के साथ-साथ तर्कसंगत तरीके से विभिन्न समस्याओं के समाधान के लिए 'गणितीय सामान्यीकरण' का उपयोग कर सकते हैं। ये सभी रणनीतियों एवं गणितीय सामान्यीकरण का उपयोग विद्यार्थियों की सोच प्रक्रिया को विस्तारित करने के लिए किया जा सकता है, जो अंततः बीजगणित में विद्यार्थियों की सीखने की क्षमता एवं उपलब्धि को बढ़ावा देता है।

बीजीय तर्क के कुछ उदाहरण सहित उपयोग

बीजीय-व्यंजकों का जोड़ एवं घटाव

उदाहरण 1

(क) बीजीय-व्यंजकों का जोड़

अंकगणित में अंकों का जोड़ एवं घटाव हम निम्न विधि से करते हैं—

$7 + 2 = 9$

$2 + 4 = 6$

ये सरल अंक गणितीय जोड़ हैं, जिसमें अंकगणित कौशल का उपयोग करके आप एक संख्या को दूसरे संख्या से जोड़ते हैं। लेकिन, क्या आपने कभी सोचा है कि बीजगणित में अज्ञात मात्राओं का जोड़ कैसे होता है?

उदाहरण के लिए, $x + x = 2x$ (यहाँ x एक अज्ञात मात्रा है)

$2x + x = 3x$

$7 + 2 = 9$ अंकगणित में आप इसे ऐसे जोड़ते हैं। अर्थात्, $1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$

बीजगणित में प्रक्रिया थोड़ी भिन्न होती है। मान लीजिए आपको जोड़ना है—

$2x + x$, अतः यह स्पष्ट है कि यहाँ

$2x + x$

$x + x + x = 3x$

लेकिन जब x+y हो तो इनका जोड़ कैसे होगा? आप जानते हैं कि दो विभिन्न चरों को एक निश्चित मान के लिए एक साथ कभी भी जोड़ा नहीं जा सकता है। अर्थात् जोड़ के उपरांत $x + y$ का मान = $x + y$ ही रह जाता है।

इसलिए, जब आप किसी चर को चर के साथ जोड़ते हैं, तो वास्तव में आप चर के गुणांक का जोड़ करते हैं—

$$1x + 1x = 2x$$

इस प्रक्रिया को बीजीय तर्क की सहायता से सरल तरीके से बताया जा सकता है, जैसे— 'एबिलिटी ऑफ़ रिवर्सिबिलिटी' एवं गणना से सार बनाना का उपयोग किया गया है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 2

(ख) बीजीय व्यंजक का गुणनखंड

यहाँ $ax^2 + bx + c$ में

ax^2, bx और c व्यंजक के तीन पद हैं

अब आप निम्न प्रकार से गुणनखंड करेंगे, आइए चरण दर चरण देखें

चरण I

जहाँ $ax^2 + bx + c$ में,

x^2 का गुणांक = a

x का गुणांक = b

c = अचर पद

यहाँ, आपको x^2 का गुणांक जो कि a है और अचर पद जो कि c है

अतः x^2 का गुणांक एवं अचर पद c का गुणनफल होगा

$= a \times c = ac$

$ax^2 + bx + c$

चरण II

अब a और c का गुणनफल x (द्वितीय पद) के गुणांक के बराबर होगा, जो कि $ax^2 + bx + c$ में मध्य पद है।

चरण III

अब दो ऐसी संख्याएँ मिलने पर, जिनका जोड़ x के गुणांक के बराबर हो तो हमें प्राप्त होगा—

$a \times c = ac$

$a + c = b$

यहाँ, हमें दो ऐसी संख्याएँ प्राप्त करनी हैं, जिनका जोड़ b हो एवं उनका गुणनफल $a \times c$ हो, ऐसी दो संख्याएँ 'a' और 'c' हैं।

चरण IV

$ax^2 + bx + c$

$ax^2 + ax + cx + c$

(चूँकि b = a और c का जोड़)

$ax(x+1) + c(x+1)$

(सामान्य गुणांक बाहर लेते हुए)

$(ax+c)(x+1)$ गुणनखंड है

चरण V

पुनः, आगे हल करने पर— $ax^2 + bx + c = 0$

चरण IV के परिणामों का प्रयोग करते हुए,

$(ax + c)(x+1) = 0$

$(ax + c) = 0$ or $(x+1) = 0$

$ax = -c$ or $x = -1$

$x = -c/a$ or $x = -1$

यहाँ, $x = -c/a$, $x = -1$ बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दो गुणांक हैं।

इसी प्रकार शिक्षक अपनी कक्षा में बीजीय तर्क के उपयोग से इन बीजगणितीय प्रत्ययों को सरलता से विश्लेषण कर विद्यार्थियों को समझा सकते हैं।

शिक्षको के लिए बीजीय तर्क—एक समाधान

गणित सीखने में विद्यार्थियों में बीजगणितीय तर्क को बढ़ावा देना आवश्यक है। बीजीय तर्क की मदद से शिक्षक सोचने की नवीन पद्धतियों को विकसित करने और विभिन्न समस्याओं के समाधान के लिए विभिन्न तरीकों से सोचने का वातावरण बनाने के लिए उपयोग कर सकते हैं, क्योंकि बीजीय तर्क विश्लेषण, समस्या पहचान एवं उनके समाधान की प्रक्रिया में एक प्रमुख भूमिका निभाता है। इन सभी

© NCERT not to be republished

उपयोगिताओं के कारण यह विद्यार्थियों की सोच प्रक्रिया को विस्तारित करने के लिए भी इस्तेमाल किया जा सकता है, जो अंततः बीजगणित को प्रभावशाली तरीकों से सीखने को बढ़ावा देता है।

शिक्षक बीजगणित को समस्या निवारण दृष्टिकोण से उपयोग करके या इसे मॉड्यूल रूप में निर्मित कर इसका उपयोग कर सकते हैं तथा विद्यार्थियों में तर्क क्षमता विकसित करने और तार्किक आयामों में सुधार करने के संदर्भ में बहुत प्रभावी अभ्यास करा सकते हैं। इस प्रकार बीजीय तर्क विद्यार्थियों को सोचने की प्रक्रिया में सहायता करने हेतु बेहद उपयोगी होगा।

शिक्षक बीजगणितीय प्रत्ययों के लिए बीजीय तर्क पर आधारित वर्क शीट्स भी तैयार कर सकते हैं, जिसका उपयोग वे अलग-अलग विद्यार्थियों के हिसाब से भी कर सकते हैं। निर्मित वर्क शीट्स विद्यार्थियों को सहायक सामग्री के रूप में भी दी जा सकती है, जिसमें वे बीजीय तर्क के आधार पर अभ्यास कर सकते हैं। शिक्षक बीजीय तर्क के अलग-अलग आयामों पर आधारित विभिन्न प्रश्नों का निर्माण कर सकते हैं, जो सिर्फ़ उन विद्यार्थियों को दें, जिन्हें उन प्रत्यय को समझने एवं हल करने में दिक्कत हो।

कुल मिलाकर शिक्षक विद्यार्थियों को बीजगणित शिक्षण में बीजीय तर्क आधारित अनुभव प्रदान करें। इसके सहयोग से विद्यार्थियों में गणित के प्रति रुचि, तर्क, सोचने के तरीके एवं गणितीय सामान्यीकरण करने एवं समझने के कौशलों का विकास कर सकते हैं।

निष्कर्ष

उपरोक्त निष्कर्ष बीजगणित सीखने और बीजगणित एवं अंकगणित के बीच अंतर को भरने का एक रास्ता दिखाते हैं। कुल मिलाकर, विभिन्न प्रकार की शिक्षण विधियों की प्रभावशीलता, गणित को पढ़ाने की पारंपरिक पद्धति पर कई शोध किए गए हैं। दुर्भाग्य से, कई विद्यार्थी गणित को एक जटिल और कठिन विषय के रूप में देखते हैं। गणित के प्रति ये नकारात्मक दृष्टिकोण सीखने की प्रक्रिया को काफी हद तक बाधित करता है। इस प्रकार, बीजीय तर्क को विकसित करने के लिए प्राथमिक स्तर पर बीजगणित के लिए एक व्यापक परिप्रेक्ष्य और प्रभावी शिक्षण रणनीतियों की आवश्यकता होती है, क्योंकि इन वर्षों में विद्यार्थियों के सोचने और समझने की क्षमता भी बहुत तीव्र गति से विकसित होती है, जो उनके भविष्य के लिए बेहतर मंच एवं अवसर प्रदान करने में मदद करता है। विभिन्न शोधों के निष्कर्षों ने बताया है कि बीजीय तर्क की कुछ प्रमुख विशेषताओं को सुधारने से बीजीय उपलब्धि में सुधार हो सकता है। इस प्रकार, यदि हम क्रमबद्ध, आयु अनुसार एवं उपयुक्त बीजीय तर्कों का प्रयोग करें तो निश्चित रूप से विद्यार्थियों के बीजीय उपलब्धि में प्रभावी सुधार कर सकते हैं।

संदर्भ

किरन, सी. 1996. द चेंजिंग फ़ेस ऑफ़ स्कूल एलजेब्रा. संपादन में सी. एल्सीना, जे. अलवरेज़, बी. हडसन, सी. लेबोर्ड. ए. परेज़. (संपादक) *8th इंटरनेशनल कांग्रेस ऑन मैथमेटिकल एजुकेशन— सेलेक्टेड लेक्चर्स*. सेविल, यस. ए. ई. एम. थेल्स, स्पेन.

© NCERT not to be republished

चौरसिया, पी. 2016. एलजेब्रिक रीज़निंग एट एलिमेंट्री लेवल—फ़िलिंग द गैप्स बिटवीन अर्थमेटिक एंड एलजेब्रा. *इंटरनेशनल जर्नल ऑफ़ साइंटिफ़िक रिसर्च*. 5(10).

नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथमेटिक्स. 2000. *प्रिंसिपल्स एंड स्टैंडर्ड्स फॉर स्कूल मैथमेटिक्स*. नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथमेटिक्स. रेस्टॉन, वी.ए.

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्. 2006. *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005*. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली.

———. 2006. *गणित शिक्षण— राष्ट्रीय फोकस समूह का आधार पत्र*. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली.

विंडसर, डब्ल्यू. जे. जे.,और ईडी, एम. 2009. *एलजेब्रिक थिंकिंग— मोर टू डू विद व्हाय, दैन एक्स एंड वाई*. ग्रिफ़िथ यूनिवर्सटी, क्वीनसलैंड, ऑस्ट्रेलिया.

© NCERT not to be republished